Equations différentielles non linéaires

Etude qualitative

Exercice 1 [00430] [correction]
Soit
$$E : y' = x^2 + y^2$$
a) Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de E vérifiant $y(0) = 0$.
b) Montrer que y est une fonction impaire.
c) Etudier la monotonie et la concavité de y.
d) Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
e) Dresser le tableau de variation de y.

Exercice 2 [00431] [correction]
a) Montrer que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+xy} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
possède une solution maximale unique.
b) Montrer que celle-ci est impaire et croissante.
c) Etablir enfin qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.
d) Déterminer la limite en $+\infty$ de cette solution.

Exercice 3 [00432] [correction]
On considère le problème différentiel :
$$\begin{cases} y' = \cos(xy) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
a) Justifier l'existence d'une unique solution maximale y.
b) En observant
$$y(x) = y_0 + \int_0^x \cos(ty(t))\,\mathrm{d}t$$
montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 [00434] [correction]
Justifier qu'il existe une solution maximale à l'équation différentielle
$$y' = x + y^2$$
vérifiant $y(0) = 0$ et que celle-ci est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 5 [00435] [correction]
On considère l'équation
$$E : y' = x + y^2$$
a) Quel est le lieu des points où les solutions de (E) présentent une tangente horizontale ?
b) Décrire le lieu des points d'inflexion ?

Exercice 6 [00437] [correction]
On considère l'équation différentielle
$$E : xy' = x + y^2 \text{ sur }]0,+\infty[$$
a) Montrer que les solutions sont définies sur des intervalles bornés de $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Etudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 7 Centrale MP [02456] [correction]
On note f la solution maximale de
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-xy}$$
telle que $f(0) = 0$.
a) Montrer que f est impaire.
b) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que f possède une limite finie a en $+\infty$.
d) Montrer que $a > 1$.
e) Montrer qu'en $+\infty$:
$$f(x) = a - \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax} + o\left(\mathrm{e}^{-ax}\right)$$

Exercice 8 Centrale MP [02457] [correction]
Soit $\lambda \in]-1,1[$. On s'intéresse à l'équation différentielle avec retard :

$$(\mathcal{E}) : f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$$

L'inconnue est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
b) Expliciter les solutions de $(\mathcal{E})$.
c) Montrer que $\prod_{k=0}^{n}(1+\lambda^k)$ tend vers une limite finie, non nulle, notée $K(\lambda)$ quand n tend vers ∞.
d) Montrer que, f étant une solution non nulle de $(\mathcal{E})$,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x$$

Exercice 9 Centrale MP [02458] [correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note P_α le problème

$$x' = \cos(x^2 + \sin(2\pi t)) - a \text{ et } x(0) = \alpha$$

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une solution maximale x_α de P_α.
b) Que dire des intervalles de définition des solutions maximales ?
c) Pour $|a| > 1$, donner les variations et les limites aux bornes des solutions.
On suppose $|a| < 1$.
d) Montrer que, pour tout $A > 0$, il existe $M(A) > 0$ tel que pour tout $\alpha \in [-A, A]$ et tout $t \in [0,1]$, $|x_\alpha(t)| \leqslant M(A)$.
e) Montrer que, pour tout $(\alpha,\beta) \in [-A,A]^2$ et tout $t \in [0,1]$:

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha-\beta| + 2M(A)\int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)|\,\mathrm{d}u$$

f) En déduire :

$$\forall t \in [0,1]\,, |x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha-\beta|\,\mathrm{e}^{2M(A)t}$$

Exercice 10 Mines-Ponts MP [02899] [correction]
Soit une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et bornée.
Soit y une solution maximale de l'équation différentielle

$$y' = \varphi(x,y)$$

Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 X MP [02979] [correction]
On considère l'équation

$$y' = x + y^2$$

Soit y une solution maximale définie sur un intervalle I.
a) Montrer que I est majoré. On pose $b = \sup I$.
b) Montrer que y est croissante au voisinage de b. Quelle est la limite de y en b ?
c) Trouver un équivalent de y au voisinage de b.

Résolution d'équations non linéaires

Exercice 12 [00438] [correction]
Déterminer les solutions ne s'annulant pas de l'équation différentielle

$$y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$$

On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $z = \sqrt{y}$.

Exercice 13 [00439] [correction]
Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$$

Exercice 14 [00440] [correction]
a) Résoudre sur tout intervalle

$$y' + \mathrm{e}^{x-y} = 0$$

b) Préciser les solutions maximales.

Exercice 15 [00441] [correction]
a) Résoudre sur tout intervalle

$$xy' - (y^2+1) = 0$$

b) Préciser les solutions maximales.

Exercice 16 [00442] [correction]
a) Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$E : y' = 2x(1 + y^2)$$

b) Préciser les solutions maximales

Exercice 17 [00443] [correction]
Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$yy' - y' = \mathrm{e}^x$$

Exercice 18 [00444] [correction]
Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$yy' = x$$

Exercice 19 Mines-Ponts MP [02898] [correction]
Déterminer les solutions de

$$yy'' = 1 + y'^2$$

Exercice 20 X MP [03069] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

Exercice 21 X MP [03085] [correction]
Résoudre, pour $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Equations autonomes

Exercice 22 [00445] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 1 + y^2$$

Exercice 23 [00446] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = y^2$$

Exercice 24 [00447] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = y(y - 1)$$

Exercice 25 [00448] [correction]
Résoudre sur tout intervalle

$$y' + \mathrm{e}^y = 0$$

Exercice 26 [00449] [correction]
Résoudre sur tout intervalle

$$y' \sin y = -1$$

Exercice 27 [00450] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' = |y|$$

Exercice 28 Centrale MP [03055] [correction]
On considère l'équation différentielle

$$E : y' = y^2 + y + 1$$

a) Existe-t-il des solutions de E sur $\mathbb{R}$?
b) Résoudre E, trouver ses solutions maximales et montrer qu'elles sont définies sur un intervalle borné dont on déterminera la longueur.

Exercice 29 [00451] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive et $x_0 \in \mathbb{R}$.
a) Soit F la primitive de $1/f$ s'annulant en x_0. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un certain intervalle ouvert I.
b) Etablir que F^{-1} est solution sur I de l'équation différentielle $x' = f(x)$ vérifiant $x(0) = x_0$.
c) Justifier que cette solution est maximale.

Exercice 30 [00452] [correction]
Déterminer les solutions au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 2y + 2y^3 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 31 [00453] [correction]
On souhaite résoudre le problème de Cauchy formé par l'équation différentielle

$$y'' + |y| = 0$$

et les conditions initiales $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}$).
On admet que ce problème de Cauchy admet une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que pour tout réel x,

$$y(x) \leqslant a$$

b) Déterminer y lorsque $a \in \mathbb{R}^-$.
On suppose désormais $a > 0$.
c) Montrer que y s'annule en exactement deux points $b_- < 0$ et $b_+ > 0$ dont on précisera les valeurs.
d) Achever la résolution du problème de Cauchy.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) La fonction $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U=\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale unique au problème de Cauchy posé, solution définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

```
dsolve({D(y)(x)=x^2+y(x)^2,y(0)=0},y(x));
plot(rhs(%),x=-1.5..1.5);
```

b) Soit $z:x\mapsto -y(-x)$ définie sur I' symétrique de I par rapport à 0.
z est dérivable et est encore solution du problème de Cauchy précédent.
Donc $I'\subset I$ et $\forall x\in I', z(x)=y(x)$.
Or puisque I' est le symétrique de I, on observe $I'=I$ puis $z=y$.
c) $y'(x)\geqslant 0$ donc y est croissante, négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
y est deux fois dérivable et $y''(x)=2x+2y'(x)y(x)=2x+2(x^2+y^2(x))y(x)$.
y'' est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ d'où la concavité de y.
d) Par l'absurde, si y n'est pas définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$, c'est qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ (car elle est impaire). Mais alors $\forall x\geqslant 1, y'(x)\geqslant 1+y^2(x)$ donc en intégrant, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\geqslant 1$, $\arctan y(x)\geqslant x+C$. Ceci est absurde.
e) y est définie, impaire, croissante sur $I=]-a,a[$ avec $a\in\mathbb{R}$.
Reste à étudier $\lim\limits_{x\to a-} y(x)$. Cette limite existe compte tenu de la monotonie de $y(x)$ et soit réelle, soit $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a-} y(x)=\ell\in\mathbb{R}$ alors posons $y(a)=\ell$. y est alors continue sur $]-a,a]$.
De plus $y'(x)\to a^2+\ell^2\in\mathbb{R}$ donc ce prolongement est $\mathcal{C}^1$ sur $]-a,a]$ et vérifie l'équation différentielle en a.
Ceci est absurde car y est solution maximale.
Par suite $\lim\limits_{x\to a-} y(x)=+\infty$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) $f(x,y)=\frac{1}{1+xy}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)/xy=-1\}$.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale unique au problème de Cauchy posé. De plus celle-ci est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ avec $\alpha,\beta\in\bar{\mathbb{R}}$, $\alpha<0<\beta$.
b) Considérons $z(x)=-y(-x)$ définie sur $]-\beta,-\alpha[$. Aisément on observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y. On en déduit $]-\beta,-\alpha[\subset]\alpha,\beta[$ donc $\alpha=-\beta$ et $y(-x)=-y(x)$ pour tout $x\in]-\beta,\beta[$. Montrons que y est croissante. La fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ et $y'=\frac{1}{1+xy}$ ne s'annule pas donc y est monotone et puisque $y(0)=0$, on a $y'(0)=1$ donc y est croissante.
c) De ce qui précède découle que y est positive sur $\mathbb{R}^+$. Montrons que $\beta=+\infty$.
Par l'absurde supposons $\beta\in\mathbb{R}^{+\star}$.
Pour tout $x\in[0,\beta[$,

$$y(x)=\int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+ty(t)}\leqslant\int_0^x\mathrm{d}t\leqslant\beta$$

donc la fonction y est croissante et majorée, elle admet par conséquent une limite finie en β. Ceci permet de prolonger y en une solution sur $]-\beta,\beta]$ ce qui contredit la maximalité de y. On conclut que $\beta=+\infty$.
d) Puisque la solution y est croissante, elle admet une limite ℓ en $+\infty$ avec $\ell\in\mathbb{R}^{+\star}\cup\{+\infty\}$.
Par l'absurde supposons $\ell\in\mathbb{R}^{+\star}$.
On a

$$y(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+ty(t)}$$

Quand $t\to+\infty$

$$\frac{1}{1+ty(t)}\sim\frac{1}{\ell t}$$

Par comparaison de fonctions positives, on peut affirmer la divergence de l'intégrale

$$\int_{[0,+\infty[}\frac{\mathrm{d}t}{1+ty(t)}$$

puis, par intégration d'une fonction positive non intégrable

$$y(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+ty(t)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) $y'=f(x,y)$ avec $f(x,y)=\cos(xy)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale unique définie sur un intervalle ouvert $I=]a,b[$ contenant 0.
b) $y(x)-y_0=y(x)-y(0)=\int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\cos(ty(t))\,\mathrm{d}t$.
Supposons $b<+\infty$.
$\int_{[0,b[}\cos(ty(t))\mathrm{d}t$ est définie en tant qu'intégrale d'une fonction bornée sur un intervalle borné.
Quand $x\to b^-$, on a $y(x)\to y_0+\int_0^b\cos(ty(t))\,\mathrm{d}t=\ell$.

Posons $y(b) = \ell$ de sorte de prolonger y par continuité.
Quand $x \to b^-$, $y'(x) \to \cos(bx) \in \mathbb{R}$ donc $y'(b) = \cos(b\ell) = \cos(by(b))$.
On obtient alors une solution de l'équation différentielle définie sur $]a,b]$.
Cela contredit la maximalité de y. Absurde.
Ainsi $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$.

Exercice 4 : [énoncé]
L'équation différentielle est de la forme $y' = f(x,y)$ avec $f(x,y) = x + y^2$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy posé.
Supposons que $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme solution du problème de Cauchy posé. On a $a_0 = 0$ et sur $]-R,R[$,
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = x + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n$.
Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence > 0 :
$a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$ puis $\forall n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
Ces relations déterminent une suite (a_n) unique et de plus on observe $|a_n| \leqslant 1$ de sorte que la série entière $\sum a_n x^n$ définie par la suite (a_n) est de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et ainsi les calculs qui précèdent assurent que sa somme est effectivement solution du problème de Cauchy posé.

Exercice 5 : [énoncé]
a) Si une solution de E présente une tangente horizontal en un point d'abscisse x alors $y'(x) = 0$ et donc $x + y^2(x) = 0$. Un tel point figure sur la courbe d'équation $x + y^2 = 0$. Inversement, pour un point de cette courbe, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution passant par ce point, solution qui présentera évidemment une tangente horizontale en celui-ci.
b) Par récurrence, une solution de E est une fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $y'' = 1 + 2yy' = 1 + 2y(x + y^2)$. Un point d'inflexion d'une solution de E figure alors obligatoirement sur la courbe d'équation $1 + 2y(x + y^2) = 0$. Inversement, pour un point de cette courbe il existe une unique solution de E passant par ce point et cette solution y vérifie $y''(x) = 0$ ainsi que
$y^{(3)}(x) = 2(x + y^2)^2 + 2y(1 + 2y(x + y^2)) = 2(x + y^2)^2 \neq 0$. La courbe présente donc une inflexion en ce point.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Soit y une solution maximale de E définie sur un intervalle $I \subset]0,+\infty[$.
Soit $a \in I$, pour $x \geqslant a$, $\frac{y'(x)}{a+y^2(x)} \geqslant \frac{1}{x}$ donc $\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{y(x)}{\sqrt{a}} \geqslant \ln x + C$ sur I. Puisque la fonction arctan est bornée, l'intervalle I l'est aussi.
b) Notons $\alpha < \beta$ les extrémités de I. $I =]\alpha,\beta[$.
La fonction y est croissante sur I.
La fonction y ne peut converger en β^- car sinon on pourrait prolonger y en une solution de E sur $]\alpha,\beta]$ ce qui contredirait la maximalité de y. Par suite y croît vers $+\infty$ en β^-.
Si $\alpha > 0$, pour les mêmes raisons que ci-dessus, y ne peut converger en α^+ et donc y tend vers $-\infty$ en α^+.
Si $\alpha = 0$. Puisque $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y(a)} = \int_x^a \frac{\mathrm{d}t}{y^2(t)} + \ln\frac{a}{x}$.
Par la monotonie de y, nous sommes assurés de l'existence d'une limite en 0^+.
Si y ne tend pas vers 0 en 0^+ alors $\int_{]0,a]}\frac{\mathrm{d}t}{y^2(t)}$ converge et l'identité précédente donne une absurdité quand $x \to 0^+$.
Ainsi y converge vers 0 en 0^+.

Exercice 7 : [énoncé]
a) On introduit $g : x \mapsto -f(-x)$ et on observe que g est solution du problème de Cauchy caractérisant la solution maximale f, g est donc une restriction de f et cela permet d'affirmer l'imparité de f.
b) Supposons f définie sur $]-b,b[$ avec $b \in \mathbb{R}^{+\star}$
$f'(x) \geqslant 0$, f est croissante donc positive sur $[0,b[$.

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-tf(t)}$ est bornée donc intégrable sur $[0,b[$. f admet donc une limite finie en b et cela permet de prolonger f en une solution sur $[0,b]$ ce qui contredit la maximalité de f.
c)

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

avec $t^2\mathrm{e}^{-tf(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car f est strictement croissante et positive. Par suite f converge en $+\infty$ vers

$$a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

d) Par croissance, $f(x) \leqslant a$ donc $a \geqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ ce qui donne $a^2 \geqslant 1$ puis $a \geqslant 1$.
De plus, il y a égalité si, et seulement si, $f(t) = a$ pour tout $t \in [0,+\infty[$ ce qui est exclu puisque $f(0) = 0$.

e) Commençons par observer :

$$0 \leqslant x(a - f(x)) \leqslant x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

Or $t^3\mathrm{e}^{-tf(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Ainsi $x(a - f(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Ensuite

$$a - f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-t(f(t)-a)}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour x assez grand :

$$\forall t \geqslant x : 1 - \varepsilon \leqslant \mathrm{e}^{-t(f(t)-a)} \leqslant 1$$

donc

$$\frac{1-\varepsilon}{a}\mathrm{e}^{-ax} \leqslant a - f(x) \leqslant \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}$$

d'où la relation proposée.

Exercice 8 : [énoncé]
a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en montrant par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $a > 0$, on peut introduire $M_a = \|f\|_{\infty,[-a,a]}$.
Comme

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$$

une récurrence facile donne

$$\left\|f^{(n)}(x)\right\| \leqslant 2^n M_a$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall x \in [-a, a], \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{(2\,|x|)^{n+1} M_a}{(n+1)!} \to 0$$

Ainsi, f est égale à la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$ et est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
b) Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ où une récurrence facile donne

$$f^{(n)}(0) = f(0)\prod_{k=0}^{n-1}(1+\lambda^k)$$

c) Posons $u_n(\lambda) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1+\lambda^k)$. On a

$$\ln(u_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+\lambda^k)$$

avec $\ln(1+\lambda^k) \sim \lambda^k$ terme général d'une série absolument convergente donc la suite $(\ln(u_n(\lambda)))$ converge puis la suite $(u_n(\lambda))$ converge vers $K(\lambda) > 0$.
d) On a

$$f(x) - K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang N au-delà duquel :

$$|u_n(\lambda) - K(\lambda)| \leqslant \varepsilon K(\lambda)$$

On a alors

$$f(x) - K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x = P(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

avec le terme polynomial

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

Pour x assez grand

$$|P(x)| \leqslant \varepsilon K(\lambda)\,|f(0)|\,\mathrm{e}^x$$

et donc

$$|f(x) - K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x| \leqslant 2\varepsilon K(\lambda)\,|f(0)|\,\mathrm{e}^x$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 9 : [énoncé]
a) On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.
b) Les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ car si une solution maximale est définie sur $]a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ alors la relation

$$x(t) = \alpha + \int_0^t \cos(x^2(u) + \sin(2\pi u)) - a\,\mathrm{d}u$$

permet de prolonger x par continuité en b car $u \mapsto \cos(x^2(u) + \sin(2\pi u)) - a$ est intégrable sur $[0, b[$ puisque bornée. Par limite de la dérivée, on peut montrer que ce prolongement est solution sur $]a, b]$ ce qui contredirait sa maximalité. Ainsi $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$.

c) Si $a > 1$ alors $x'(t) \leqslant 1 - a \leqslant 0$. x est décroissante et puisque $x(t) = \alpha + \int_0^t x'(u)\,\mathrm{d}u$, l'inégalité précédente permet d'obtenir les limites de x en $+\infty$ et $-\infty$. Ainsi

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	α	$\searrow$	$-\infty$

.

d) Pour $t \in [0, 1]$,

$$x_\alpha(t) = \alpha + \int_0^t \cos(x_\alpha^2(u) + \sin(2\pi u)) - a\,\mathrm{d}u$$

donne

$$|x_\alpha(t)| \leqslant |\alpha| + 2 \leqslant M(A) \text{ avec } M(A) = A + 2$$

e) En exploitant $|\cos u - \cos v| \leqslant |u - v|$,

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| = |\alpha - \beta| + \int_0^t \left|x_\alpha^2(u) - x_\beta^2(u)\right|\,\mathrm{d}u$$

puis

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha - \beta| + 2M(A)\int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)|\,\mathrm{d}u$$

car

$$|x_\alpha(t) + x_\beta(t)| \leqslant 2M(A)$$

f) Posons $g(t) = \int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)|\,\mathrm{d}u$.
L'inégalité précédente donne

$$\left(g(t)\mathrm{e}^{-2M(A)t}\right)' \leqslant |\alpha - \beta|\,\mathrm{e}^{-2M(A)t}$$

En intégrant

$$g(t)\mathrm{e}^{-2M(A)t} \leqslant \frac{|\alpha - \beta|}{2M(A)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2M(A)t}\right)$$

En réinjectant dans l'inégalité de départ :

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha - \beta| + |\alpha - \beta|\left(\mathrm{e}^{2M(A)t} - 1\right) = |\alpha - \beta|\,\mathrm{e}^{2M(A)t}$$

Exercice 10 : [énoncé]
Soit I l'intervalle sur lequel est défini y et $a \in I$. On sait que cet intervalle est ouvert.
Supposons par l'absurde que I soit majoré. Notons $b \in \mathbb{R}$ son extrémité supérieure.
Pour $x \in [a, b[$,

$$y(x) = y(a) + \int_a^x \varphi(t, y(t))\mathrm{d}t$$

Or la fonction φ est bornée donc l'intégrale $\int_{[a,b[} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t$ converge. On peut donc prolonger y par continuité en b en une solution de l'équation différentielle sur $I \cup \{b\}$. Ceci contredit la maximalité de y.
De même, l'intervalle I n'est pas minoré et donc $I = \mathbb{R}$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Si I n'est pas majoré alors pour $x \geqslant 1$, $y' \geqslant 1 + y^2$ puis

$$\frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} \geqslant 1$$

En intégrant,

$$\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geqslant x - 1$$

ce qui est absurde car la fonction arctan est bornée.
b) Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on a

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t = y(a) + \frac{x^2 - a^2}{2} + \int_a^x y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Si l'intégrale $\int_{[a,b[} y^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on peut prolonger par continuité y en b en un solution de E ce qui contredit la maximalité de y.
Sinon, l'intégrale $\int_{[a,b[} y^2(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et puisque c'est l'intégrale d'une fonction positive,

$$\int_a^x y^2(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$$

On en déduit que y tend vers $+\infty$ en b^- et en particulier $y'(x) = x + y^2(x)$ est positif au voisinage de b.
Cela résout le problème dans un ordre différent de celui qui était soumis. L'auteur de l'énoncé avait-il une démarche plus simple en tête ?
c) En intégrant

$$\frac{y'}{y^2} = 1 + \frac{x}{y^2}$$

on obtient

$$\int_x^b \frac{y'(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t = b - x + \int_x^b \frac{t}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales engagées.
Or

$$\int_x^b \frac{y'(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y(x)}$$

et

$$\left|\int_x^b \frac{t\,\mathrm{d}t}{y^2(t)}\right| \leqslant \frac{1}{y^2(x)}\frac{1}{2}(b^2-x^2) = o\left(\frac{1}{y(x)}\right)$$

donc

$$\frac{1}{y(x)} \sim b - x$$

puis

$$y(x) \sim \frac{1}{b-x}$$

Exercice 12 : [énoncé]
Soit y une fonction à valeurs strictement positives, définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Posons $z(x) = \sqrt{y(x)}$, z est dérivable.
y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle

$$z' + z = \frac{1}{2}(x+1)$$

Après résolution, on obtient

$$z(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

On en déduit

$$y(x) = (\frac{1}{2}x + C\mathrm{e}^{-x})^2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Ainsi

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \frac{1}{2}x + C\mathrm{e}^{-x} \neq 0 \text{ et } y(x) = \left(\frac{1}{2}x + C\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \text{ sur } I$$

Inversement, de telles fonctions sont bien solutions

Exercice 13 : [énoncé]
Soit y une solution sur un intervalle I de $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.
Pour des raisons d'existence $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ et sur I, $y(x) > 0$.
Sur I, $xy'(x) - y(x) = y(x)\ln\frac{y(x)}{x}$ puis $\left(\frac{y(x)}{x}\right)' = \frac{y(x)}{x^2}\ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.
Posons $z(x) = y(x)/x$. On obtient $z'(x) = \frac{z(x)}{x}\ln(z(x))$ puis en posant $t(x) = \ln(z(x))$, $t'(x) = \frac{z'(x)}{z(x)} = \frac{1}{x}t(x)$.
Après résolution de cette équation linéaire $t(x) = Cx$ puis $y(x) = x\mathrm{e}^{Cx}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Réciproquement de telles fonctions sont solutions.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Soit y une solution sur un intervalle I de $y' + \mathrm{e}^{x-y} = 0$.
Sur I, $y'(x)\mathrm{e}^{y(x)} = -\mathrm{e}^x$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, \mathrm{e}^{y(x)} = -\mathrm{e}^x + C$.
Par suite $\forall x \in I, -\mathrm{e}^x + C > 0$ et $y(x) = \ln(C - \mathrm{e}^x)$.
Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
b) Etudions la condition $\forall x \in I, -\mathrm{e}^x + C > 0$.
$-\mathrm{e}^x + C > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < C$.
Cas $C \in \mathbb{R}^-$:
Il n'existe pas d'intervalle I non vide vérifiant $\forall x \in I, -\mathrm{e}^x + C > 0$.
Cas $C \in \mathbb{R}^{+\star}$:
$-\mathrm{e}^x + C > 0 \Leftrightarrow x < \ln C$ donc $I \subset \left]-\infty, \ln C\right[$.
Les solutions maximales cherchées sont les fonctions d'expression $y(x) = \ln(C - \mathrm{e}^x)$ définies sur $\left]-\infty, \ln C\right[$ pour $C > 0$.

Exercice 15 : [énoncé]
a) Soit y une solution sur un intervalle I de $xy' - (y^2+1) = 0$.
L'intervalle I ne peut contenir 0 car l'équation $xy' - (y^2+1) = 0$ ne peut être satisfaite en $x = 0$.
Sur I, on a $\frac{y'(x)}{y^2(x)+1} = \frac{1}{x}$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, \arctan(y(x)) = \ln|x| + C$.
Nécessairement $\forall x \in I, \ln|x| + C \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et $y(x) = \tan(\ln|x| + C)$.
Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
b) Etudions la condition $\forall x \in I, \ln|x| + C \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.
$-\frac{\pi}{2} < \ln|x| + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\pi/2-C} < |x| < \mathrm{e}^{\pi/2-C}$
Ainsi $I \subset \left]-\mathrm{e}^{\pi/2-C}, -\mathrm{e}^{-\pi/2-C}\right[$ ou $I \subset \left]\mathrm{e}^{-\pi/2-C}, \mathrm{e}^{\pi/2-C}\right[$.
Les solutions maximales cherchées sont les fonctions d'expression $y(x) = \tan\ln(|x| + C)$ définies sur $\left]-\mathrm{e}^{\pi/2-C}, -\mathrm{e}^{-\pi/2-C}\right[$ ou sur $\left]\mathrm{e}^{-\pi/2-C}, \mathrm{e}^{\pi/2-C}\right[$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 : [énoncé]
a) Soit y une solution sur un intervalle I de E.
Pour tout $x \in I$, $\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = 2x$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan y(x) = x^2 + C$.
Puisque pour tout $x \in I$, $\arctan y(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $x^2 + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et
$y(x) = \tan(x^2 + C)$
et $y(x) = \tan(x^2 + C)$.
Inversement de telles fonctions sont solutions.
b) Etudions la condition $\forall x \in I, x^2 + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
On a $-\frac{\pi}{2} < x^2 + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - C < x^2 < \frac{\pi}{2} - C$.
Cas $C \geqslant \pi/2$:
On a $\frac{\pi}{2} - C \leqslant 0$ donc il n'existe pas d'intervalle I non vide vérifiant $\forall x \in I, x^2 + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Cas $C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:
On a $\frac{\pi}{2} - C > 0$ et $-\frac{\pi}{2} - C < 0$ donc $-\frac{\pi}{2} < x^2 + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}$.
Par suite $I \subset \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[$.
Cas $C \leqslant -\frac{\pi}{2}$:
On a $-\frac{\pi}{2} - C \geqslant 0$ donc $-\frac{\pi}{2} < x^2 + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{\pi}{2} - C} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}$.
Par suite $I \subset \left]\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[$ ou $I \subset \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}\right[$.
Finalement, les solutions maximales cherchées sont les fonctions d'expression $y(x) = \tan(x^2 + C)$ définies sur $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[$ pour $C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[$ ou $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}\right[$ pour $C \leqslant -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 17 : [énoncé]
Soit y une solution sur I de l'équation $yy' - y' = \mathrm{e}^x$
On a $y'(x)(y(x) - 1) = \mathrm{e}^x$ sur I donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, (y(x) - 1)^2 = 2\mathrm{e}^x + C$.
Nécessairement $\forall x \in I, 2\mathrm{e}^x + C \geqslant 0$ et $|y(x) - 1| = \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$ n'est susceptible de ne s'annuler qu'en une extrémité de I donc $x \mapsto y(x) - 1$ est de signe constant. Ainsi $\forall x \in I, y(x) = 1 + \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$ ou $\forall x \in I, y(x) = 1 - \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions sous réserve d'être définies et dérivables sur I c'est-à-dire que $2\mathrm{e}^x + C > 0$ sur I.

Exercice 18 : [énoncé]
Soit y solution sur un intervalle I de l'équation $yy' = x$.
Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que sur I, $\frac{1}{2}y^2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ donc
$|y(x)| = \sqrt{x^2 + 2C}$ et $x^2 + 2C \geqslant 0$
Cas $C > 0$ alors $|y(x)| = \sqrt{x^2 + 2C} \neq 0$ impose y de signe constante et donc $\forall x \in I, y(x) = \sqrt{x^2 + 2C}$ ou $\forall x \in I, y(x) = -\sqrt{x^2 + 2C}$.
Cas $C < 0$ alors $x^2 + 2C \geqslant 0$ impose $I \subset \left]-\infty, \sqrt{-2C}\right]$ ou $I \subset \left[\sqrt{-2C}, +\infty\right[$.
Dans les deux cas y est de signe constant sur I et on parvient aux deux mêmes expressions qu'au dessus.
Cas $C = 0$ alors après un éventuel recollement en 0 (dans le cas où $0 \in I^\circ$) on parvient à $\forall x \in I, y(x) = x$ ou $\forall x \in I, y(x) = -x$.
Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions sous réserve qu'elles soient dérivables ce qui impose $I \subset \left]-\infty, \sqrt{-2C}\right[$ ou $I \subset \left]\sqrt{-2C}, +\infty\right[$ dans le cas $C < 0$.

Exercice 19 : [énoncé]
Soit y une solution sur I. y ne s'annule pas ce qui permet d'écrire

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{y}$$

assurant que y est trois fois dérivable.
En dérivant $yy'' = 1 + y'^2$, on obtient $yy^{(3)} = y'y''$ d'où

$$\left(\frac{y''}{y}\right)' = 0$$

Ainsi il existe une constante λ vérifiant $y'' = \lambda y$.
De plus $yy'' = 1 + y'^2 > 0$ assure $\lambda > 0$.
Ainsi y est de la forme

$$y(x) = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$$

Inversement, pour une telle fonction,

$$y(x)y''(x) - y'(x)^2 = \lambda\left(\left(A\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}x + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)\right)^2 - \left(A\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}x + B\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}x\right)^2\right) = \lambda\left(A^2 - B\right.$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les

$$y(x) = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$|A| > |B| \text{ et } \lambda = \frac{1}{A^2 - B^2}$$

Exercice 20 : [énoncé]
On peut remarquer que la quantité $xy' - y$ est le numérateur de la dérivée de y/x.
Sur $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$, l'équation différentielle étudiée est équivalente à l'équation

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Posons $z(x) = y(x)/x$ et on est amené à résoudre

$$z' = \frac{1}{x}\sqrt{1+z^2}$$

Cette équation à variables séparables équivaut à

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{x}$$

Une fonction z en est solution sur $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\operatorname{argsh}(z(x)) = \ln x + \lambda$$

et nous obtenons pour solution générale

$$z(x) = \operatorname{sh}(\ln x + \lambda)$$

puis

$$y(x) = x\operatorname{sh}(\ln x + \lambda) = \frac{\mathrm{e}^{2\lambda}x^2 - 1}{2\mathrm{e}^{\lambda}}$$

qui a un sens sur $\mathbb{R}^{+\star}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sur $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$, une étude semblable conduit à la solution générale

$$y(x) = x\operatorname{sh}(-\ln|x| + \mu) = \frac{x^2 - \mathrm{e}^{2\mu}}{2\mathrm{e}^{\mu}}$$

qui a un sens sur $\mathbb{R}^{-\star}$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.
Il reste à déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$.
Sachant que quand $x \to 0$,

$$\frac{\mathrm{e}^{2\lambda}x^2 - 1}{2\mathrm{e}^{\lambda}} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda} + o(x) \text{ et } \frac{x^2 - \mathrm{e}^{2\mu}}{2\mathrm{e}^{\mu}} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mu} + o(x)$$

on peut raccorder par continuité une solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ définie à partir de λ et une solution sur $\mathbb{R}^{-\star}$ définie à partir de μ sous la condition $\mu = -\lambda$ et la fonction obtenue est alors dérivable en 0 et solution de l'équation différentielle étudiée.
Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation étudiée sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2\lambda}x^2 - 1}{2\mathrm{e}^{\lambda}}$$

Exercice 21 : [énoncé]
Par la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$$

En factorisant

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

Soit y une solution de l'équation différentielle étudiée sur un intervalle I.
Par ce qui précède on a

$$y'' + y' + y = 0 \text{ ou } y'' = y' = y$$

l'alternative étant à comprendre valeurs par valeurs.
Montrons que cette alternative vaut en fait sur l'intervalle.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$(y'' + y' + y)(t_1) = 0 \text{ et } (y'' + y' + y)(t_2) \neq 0$$

Pour fixer les idées, supposons $t_1 < t_2$ et considérons

$$t_0 = \sup\{t \leqslant t_2 / (y'' + y' + y)(t) = 0\}$$

Par continuité on a

$$(y'' + y' + y)(t_0) = 0$$

et par construction, pour tout $t \in]t_0, t_2]$

$$(y'' + y' + y)(t) \neq 0$$

et donc

$$y''(t) = y'(t) = y(t)$$

La résolution sur l'intervalle $]t_0, t_2]$ de l'équation $y' = y$ donne

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^t \text{ avec } \lambda \neq 0$$

et par passage à la limite quand $t \to t_0$ on obtient

$$(y'' + y' + y)(t_0) = 3\lambda \mathrm{e}^{t_0} \neq 0$$

C'est absurde.

On en déduit que y est solution sur I de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ ou de l'équation $y'' = y' = y$
Après résolution, on en déduit

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left[\lambda\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + \mu\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right] \text{ ou } y(t) = \lambda\mathrm{e}^t$$

La réciproque est immédiate en remontant le calcul.

Exercice 22 : [énoncé]
Si y est solution sur I alors $\frac{y'}{1+y^2} = 1$ donc $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \arctan y(x) = x + C$.
Or $\arctan y(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $x + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis $I \subset \left]-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right[$ et $\forall x \in I, y(x) = \tan(x + C)$.
Réciproque est immédiate.

Exercice 23 : [énoncé]
L'équation est de la forme $y' = f(x, y)$ avec f fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc exploiter le théorème de Cauchy-Lipschitz.
$y = 0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle. Il n'existe donc pas d'autre solution s'annulant.
Soit y une solution sur I ne s'annulant pas. On a $\frac{y'}{y^2} = 1$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{1}{y} = x + C$ et alors $\forall x \in I,\ x + C \neq 0$ et $y(x) = -\frac{1}{x+C}$. La réciproque est immédiate.

Exercice 24 : [énoncé]
$y \mapsto y(y-1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz
Les fonctions constantes égales à 0 et 1 sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation. En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, il n'y a pas d'autres solutions prenant les valeurs 0 et 1 que les solutions constantes.
Soit y une solution sur I non constante. On a $\forall x \in I, \frac{y'(x)}{y(x)(y(x)-1)} = 1$. Or $\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} = \ln\left|1 - \frac{1}{t}\right| + C^{te}$ donc $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = x + C$ puis $\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = \mathrm{e}^{x+C}$. La fonction $x \mapsto \frac{y(x)-1}{y(x)}$ étant de signe constant, on parvient à $\frac{y(x)-1}{y(x)} = \lambda\mathrm{e}^x$ avec $\lambda = \pm\mathrm{e}^C$ puis $y(x) = \frac{1}{1-\lambda\mathrm{e}^x}$ avec $1 - \lambda\mathrm{e}^x \neq 0$ sur I.

Exercice 25 : [énoncé]
Soit y une solution sur un intervalle I de $y' + \mathrm{e}^y = 0$.
Sur I, on a $-y'(x)\mathrm{e}^{-y(x)} = 1$ donc $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \mathrm{e}^{-y(x)} = x + C$.
Par suite $\forall x \in I, x + C > 0$ et $y(x) = -\ln(x + C)$.
Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.

Exercice 26 : [énoncé]
Soit y une solution sur I de $y'\sin y = -1$.
Sur I, on a $-y'(x)\sin y(x) = 1$ donc $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \cos(y(x)) = x + C$.
Si $y(x) = 0 \quad [\pi]$ alors l'équation $y'\sin y = -1$ ne peut être satisfaite en cet x.
Donc $\forall x \in I,\ y(x) \neq 0 \quad [\pi]$.
Par continuité $\exists k \in \mathbb{Z}, \forall x \in I, y(x) \in]k\pi, (k+1)\pi[$ et $\cos(y(x)) = x + C$ donc
$y(x) = \begin{cases} \arccos(x + C) + k\pi \text{ si } k \text{ est pair} \\ -\arccos(x + C) + (k+1)\pi \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 27 : [énoncé]
Soit y une solution. C'est une fonction croissante.
Si elle est positive alors $\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = C\mathrm{e}^x$.
Si elle est négative alors $\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = -C\mathrm{e}^{-x}$.
Si elle s'annule en $a \in \mathbb{R}$ alors sur $]-\infty, a]$, $y' = -y$ et sur $[a, +\infty[$, $y' = y$.
Le recollement des deux solutions obtenues donne $y = 0$.
Inversement : ok

Exercice 28 : [énoncé]
a) Soit y une solution de E définie sur un intervalle I.
Pour tout $a, b \in I$,

$$b - a = \int_a^b \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{y'(t)}{y^2(t) + y(t) + 1}\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut réaliser le changement de variable $u = y(t)$ et alors

$$b - a = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + u + 1} \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + u + 1} < +\infty$$

Les solutions de E sont donc définies sur des intervalles bornés ; il n'y a pas de solutions de E sur $\mathbb{R}$.

b) Soit y une solution de E définie sur un intervalle I non singulier.
Pour tout $t \in I$, on a

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)+y(t)+1} = 1$$

Or

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t)+y(t)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y(t)+1}{\sqrt{3}}\right)$$

donc il existe une constante réelle C telle que pour tout $t \in I$,

$$\arctan\left(\frac{2y(t)+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(t+C)$$

Puisque la fonction arctan est à valeurs dans $]-\pi/2,\pi/2[$, on a pour tout $t \in I$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(t+C) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

et donc

$$I \subset \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right[-C$$

Enfin, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t+C)\right)$$

Résumons :
Si y est une solution de E sur un intervalle non singulier I, il existe une constante C réelle telle que

$$I \subset \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right[-C \text{ et } \forall t \in I, y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t+C)\right)$$

Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on peut affirmer que de telles fonctions sont solutions.
Les solutions maximales sont alors les fonctions

$$y_C : \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right[-C \to \mathbb{R} \text{ avec } y_C(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t+C)\right)$$

Elles sont définies sur un intervalle ouvert de longueur $2\pi/\sqrt{3}$.

Exercice 29 : [énoncé]
a) F est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I = F(\mathbb{R})$ intervalle ouvert dont les extrémités sont les limites de F aux extrémités de I.
b) On a $F(x_0) = 0$ donc $F^{-1}(0) = x_0$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$ donc F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(F^{-1}(t)\right)' = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t))$. Ainsi F^{-1} est solution de $x' = f(x)$.
c) Si I est majoré et que a désigne son extrémité droite alors $F^{-1}(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ car $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$. Il n'est donc pas possible de prolonger F^{-1} en a. De même, pour une éventuelle extrémité gauche finie de I.

Exercice 30 : [énoncé]
Soit y une solution sur I intervalle contenant 0 du problème posé.
On a $y'y'' = 2y'y + 2y'y^3$ donc $\frac{1}{2}y'^2 = y^2 + \frac{1}{2}y^4 + C$ avec $C = \frac{1}{2}$ après évaluation en 0.
Ainsi $y'^2 = (1+y^2)^2$ puis $\left(\frac{y'}{1+y^2}\right)^2 = 1$.
La fonction $\frac{y'}{1+y^2}$ étant continue sur I et prenant la valeur 1 en 0 on a :
$\frac{y'}{1+y^2} = 1$ d'où $\arctan y = x + C'$ puis $C' = 0$ après évaluation en 0.
Finalement $y = \tan x$ et $I \subset\,]-\pi/2,\pi/2[$. Réciproque immédiate.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Puisque $y'' = -|y| \leqslant 0$ la fonction y' est décroissante. Sachant que $y'(0) = 0$, on en déduit le signe de y' puis les variations de$y$ assurant un maximum en 0. Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \leqslant y(0) = a$$

b) Si $a \leqslant 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \leqslant 0$ donc l'équation $y'' + |y| = 0$ devient $y'' - y = 0$.
La solution générale de cette équation est $y(t) = \lambda \mathrm{ch} t + \mu \mathrm{sh} t$.
Les conditions initiales donnent $\lambda = a$ et $\mu = 0$.
Au final, la solution cherchée est $y(t) = a\mathrm{ch} t$.
c) Si la fonction y est de signe positif sur $\mathbb{R}^+$ alors l'équation $y'' + |y| = 0$ devient $y'' + y = 0$ et après résolution on parvient à l'expression $y(t) = a\cos t$. Cela contredit le signe constant de y.
On en déduit que y change de signe et donc que y s'annule sur $\mathbb{R}^+$.
Puisque y est décroissante et même strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, cette annulation est unique. On la note b^+. L'étude sur $\mathbb{R}^-$ est similaire et introduit b^-.

Puisque sur $[b^-,b^+]$, $y(t)\geqslant 0$, la résolution de l'équation $y''+|y|=0$ avec condition initiale donne $y(t)=a\cos t$ sur $[b^-,b^+]$. Puisque b^- et b^+ sont les premières annulations de y, on a $b^+=\pi/2$ et $b^-=-\pi/2$.
d) Sur $[-\pi/2,\pi/2]$, $y(t)=a\cos t$.
Puisque sur $[\pi/2,+\infty[$, $y(t)\leqslant 0$, l'expression de y est de la forme $y(t)=\lambda\mathrm{ch}t+\mu\mathrm{sh}t$.
Le raccord dérivable en $\pi/2$ donne

$$\begin{cases}\lambda\mathrm{ch}\pi/2+\mu\mathrm{sh}\pi/2=0\\ \lambda\mathrm{sh}\pi/2+\mu\mathrm{ch}\pi/2=-a\end{cases},\begin{cases}\lambda=a\mathrm{sh}\pi/2\\ \mu=-a\mathrm{ch}\pi/2\end{cases}$$

Ainsi

$$\forall t\geqslant\pi/2, y(t)=a\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\mathrm{ch}t-a\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}\mathrm{sh}t=a\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

De même,

$$\forall t\leqslant-\pi/2, y(t)=a\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$$

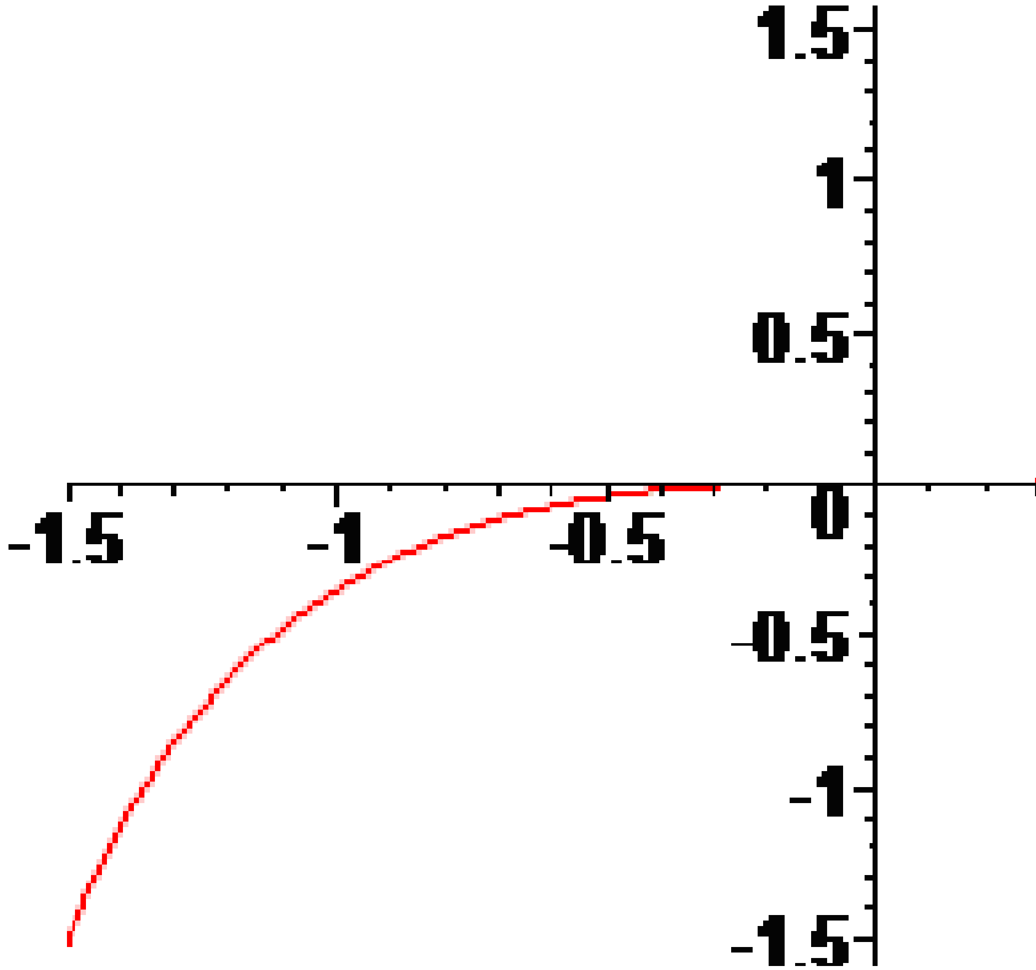

FIGURE 1 – La solution de $y'=x^2+y^2$ vérifiant $y(0)=0$